

# CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIANTES EN LA INDUSTRIA ALIMENTARIA: IMPLEMENTACIÓN A TRAVÉS DEL ESTADÍSTICO $T^2$ -HOTELLING

Fermín, José Simón<sup>1</sup>  
Valdiviezo, Martha<sup>2</sup>  
Orlandoni, Giampaolo<sup>3</sup>  
Barreto, Simón<sup>4</sup>

Recibido: 12-12-2007

Revisado: 06-03-2009

Aceptado: 21-11-2009

## RESUMEN

En la industria existen muchas situaciones donde es necesario el control o monitoreo simultáneo de dos o más variables de calidad del proceso productivo. Los problemas de monitoreo de procesos donde se estudian diversas variables relacionadas, se conocen como control estadístico de procesos multivariantes (CEPM). El objetivo de este trabajo consiste en describir la implementación del CEPM mediante el uso del estadístico  $T^2$ -Hotelling en plantas industriales alimentarias. Esta técnica se compone de cuatro elementos: plan de CEPM, entrenamiento de CEPM, trabajo de equipo y compromiso de la gerencia. El plan de CEPM está conformado por el *modelo de CEPM* y el *diagnóstico de CEPM*. El modelo de CEPM apoya al analista de calidad en la construcción de un conjunto de datos históricos homogéneos, permitiendo el uso de gráficas de control de Shewhart tanto univariantes como multivariantes. El diagnóstico de CEPM se diseña con el fin de identificar la(s) variable(s) fuera de control mediante gráficas de control. Los cuatro elementos conforman un sistema global, que incorpora tanto aspectos técnicos como financieros, gerenciales y organizacionales. Se enfatiza la implementación del CEPM en una planta procesadora de alimentos y se analiza un caso real de tres variables de calidad en el proceso de laminación del endospermo para la elaboración de harina precocida de maíz. Se concluye que la implementación del CEPM es factible debido a su simplicidad, formato gráfico asociado con software disponible y alto compromiso al incorporar gerentes, analistas y empleados de la planta.

**Palabras clave:** control estadístico de procesos multivariantes, planta procesadora de alimentos;  $T^2$  Hotelling, agroindustria

---

1 Licenciado en Educación, mención Matemática (Universidad de Oriente, Venezuela); M. Sc. en Estadística (Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela); Ph. D. en Estadística (Kansas State University, EE.UU.). Profesor titular jubilado del Instituto Universitario de Tecnología Cumaná. **Dirección postal:** Departamento de Matemática, Postgrado de Matemática, Universidad de Oriente (UDO), Núcleo Sucre. Cumaná, estado Sucre, Venezuela. **Teléfono:** +(58)(293) 4302329. **Fax:** +(58)(293)(0293) 4302329; **e-mail:** sfermin@cantv.net

2 Licenciada en Matemática (Universidad de Oriente, Venezuela); M. Sc. en Matemática (Universidad de Oriente, Venezuela). Profesora del Departamento de Contaduría, Escuela de Administración. **Dirección postal:** Departamento de Matemática, Postgrado de Matemática, Universidad de Oriente (UDO), Núcleo Sucre. Cumaná, estado Sucre, Venezuela. **Teléfono:** +(58)(293) 4302329. **Fax:** +(58)(293)(0293) 4302329; **e-mail:** mvaldivi79@cantv.net

3 Economista (Universidad de Los Andes, ULA, Venezuela); Master of Science en Economía/Econometría (Iowa State University, EE.UU.); Especialista en Evaluación de Proyectos Ambientales y Análisis de Riesgo (Administración de Proyectos, ULA-Universidad del CUYO, Argentina); Análisis de Proyectos Sociales y Ambientales, OEA-CIDIAT-ULA; Análisis de Proyectos Económicos y Ambientales: UCV-University of Cornell). Profesor titular e investigador del Instituto de Estadística Aplicada y Computación (IEAC) y del Centro de Simulación y Modelos (CESIMO), de la ULA. **Dirección postal:** Núcleo Liria, edificio G «Leocadio Hontoria», 2º piso, IEAC. Mérida 5101, Venezuela. **Teléfono:** +(58)(274) 2401116; **e-mail:** orlandoni@ula.ve

4 Licenciado en Química (Universidad de Oriente, Venezuela); Master en Ciencias e Ingeniería de los Alimentos (Universidad de Oriente, Venezuela). Personal de REMAVENCA, Establecimiento MAZORCA (Maíz de Oriente). **Dirección postal:** Cumaná, Avenida Universidad N° 20. **e-mail:** sibarreto@cantv.net

## ABSTRACT

There are many situations in industry, in which the simultaneous monitoring of two or more related quality variable of the production process is necessary. Process monitoring problems in which several related variables are of interest are known as multivariate statistical process control (MSPC). This article aims to implement the MSPC in food industrial plants. This implementation consists of four elements: MSPC plan, MSPC training, Team approach, and Management involvement. MSPC Plan consists of two practical tools, which are Method of Model of MSPC, and MSPC Diagnosis. Method of Model of MSPC supports the practitioners to construct final historical data set. It covers the situation of using Shewhart control charts, and using MSPC control chart. MSPC diagnosis is designed to identify the out-of-control variable in a multivariate control chart. These four elements conform a whole system that incorporates technical aspects like finance, management and organization. The MSPC was implemented in the food processing plants. Specifically, in a cooked flour production processing plant, a real application of three quality variables in the endosperm lamination process is analyzed. Main conclusion shows that the MSPC implementation guideline is feasible due to its simplicity, graphical format associated with available software, and high compromise to incorporate plant management, analyst and employees.

**Key words:** multivariate statistical process control, food processing plant,  $T^2$  Hotelling, food industry

## RÉSUMÉ

Dans l'industrie beaucoup de situations existent où c'est nécessaire le contrôle simultané de deux ou plus variable de qualité du processus productif. Les problèmes de surveillance de processus où les variables apparentées diverses sont étudiées, ils sont contrôle statistique des processus multi-variables (MSPC, en anglaise). L'objectif de ce travail consiste en rendant effectif le CEPM au moyen de l'usage du  $T^2$ -Hotelling statistique, dans les plantes industrielles, la mise en œuvre a composé de quatre éléments: Le plan de CEPM ce conformé par le modèle de CEPM et le diagnostic de CEPM. Le modèle de supports CEPM l'analyste de qualité dans la construction d'un groupe de données historiques homogènes. Ce modèle autorise l'usage de graphique de je contrôlez de Shewhart comme beaucoup d'univariable comme multi-variable. Le diagnostic de CEPM a été conçu avec le but d'identifier variables en dehors de contrôle au moyen des graphique du contrôle. Les quatre éléments conforment un système global qui incorpore tant d'aspects techniques comme financier, directorial et d'organisation. La mise en œuvre du CEPM est accentuée dans un processeur de la plante de nourritures. Un vrai cas de trios variables de qualité a été analysé dans le processus de laminage de l'endosperme pour l'élaboration d'ils serait précuit. Vous concluez que la mise en œuvre du CEPM est faisable dû à sa simplicité, le format graphique a associé avec logiciel engagement disponible et haut à l'incorporer directeurs, annalistes et employés de la plante

**Mots clé:** contrôle statistique des processus multi-variables, plante de nourritures,  $T^2$ - Hotelling, industrie alimentaire

## 1. INTRODUCCIÓN

La calidad ocupa un papel estratégico en las empresas e instituciones, ya que a través de ella es posible mejorar la posición competitiva y el desempeño general. Se consideran los requerimientos del consumidor y la calidad de los productos de los competidores en el diseño de productos y servicios de calidad, de modo que estos satisfagan plenamente las necesidades de los clientes y superen sus expectativas. Para hacer posible el logro de estas metas, la administración estratégica de la calidad incluye conceptos, técnicas, metodología y procedimientos con una clara orientación al control total de la calidad en todas las funciones de la organización. Pueden mencionarse dentro de éstas la reingeniería de procesos, los procesos de comparación competitivos, la función de despliegue de calidad, el control estadístico de procesos y la calidad en el servicio.

El control estadístico de procesos (CEP) es una colección de herramientas - gráficas de control- de resolución de problemas, útil para lograr la estabilidad y mejorar la capacidad del proceso mediante la reducción de la variabilidad. El objetivo de CEP es lograr una alta calidad del producto, reduciendo costos de producción y minimizando los defectos del producto. Una de las herramientas vitales en el CEP es la gráfica desarrollada por Walter A. Shewhart (Shewhart, 1931). Señala este autor que la variación del proceso es el resultado de dos fuentes. Una de éstas, denominada *causas comunes*, se debe a su naturaleza inherente y no pueden ser alteradas sin cambiar el proceso mismo. La otra fuente de variabilidad se debe a *causas asignables*, aquéllas que no son parte del proceso o sistema, que no están siempre presentes pero surgen en circunstancias específicas. Un proceso en el cual los resultados están siendo afectados sólo por causas comunes se

denomina proceso estable y se dice que está bajo control estadístico. En general las técnicas de control estadístico de procesos ayudan a monitorear el proceso de producción y a detectar su conducta anormal, debido a causas especiales. La idea es expedir una vez que estas causas especiales se detectan y además se eliminan: el proceso puede mejorarse, así como la calidad del producto.

Sin embargo, una característica importante de la gráfica de control de Shewhart es que sólo puede monitorear una variable a la vez. En la actualidad los procesos de producción se han hecho más integrados y complejos. Monitorear las variables del proceso separadamente ignora la posible correlación o interacción entre ellas, y por esto se critica el enfoque Shewhart como inadecuado para reflejar adecuadamente la situación. Harold Hotelling, en su artículo pionero (Hotelling, 1947), sentó las bases del control estadístico de procesos multivariantes, al proponer el monitoreo simultáneo de diversas variables tomando en cuenta la posible correlación entre ellas. El control estadístico de procesos multivariantes se refiere a un conjunto de procedimientos estadísticos para el monitoreo y control del desempeño de operación de los procesos de *batch*, continuos y discretos.

Muchos problemas en control de calidad industrial involucran un vector de mediciones de diversas variables en lugar de una sola. Aunque el proceso se podría monitorear usando diversas gráficas individuales hasta el grado que estas mediciones estén mutuamente correlacionadas, se obtendría mejor sensibilidad usando métodos multivariantes que tomen en consideración las correlaciones.

El control estadístico de procesos multivariantes (CEPM) puede ayudar en el monitoreo de la producción en plantas industriales, así como en la detección efectiva de los eventos anormales del proceso. Esto contribuiría con la reducción de los costos de producción y con una tasa inferior de defectos del producto. El objetivo de este trabajo consiste en describir la implementación del CEPM mediante el uso del estadístico  $T^2$ -Hotelling en plantas industriales y, especialmente, en una planta procesadora de alimentos.

## 2. MONITOREO Y CONTROL DE PROCESOS MULTIVARIANTES USANDO GRÁFICAS DE CONTROL

El control de procesos en una situación univariante generalmente se lleva a cabo mediante el monitoreo de gráficas de control por ubicación y variabilidad. Puesto que solamente se toma en consideración una variable, la interpretación de una señal se puede realizar con facilidad. Sin embargo, en una situación multivariante, la interpretación de la señal es más difícil puesto que puede ser producto de la relación de diversas variables.

Jackson (1991) estableció que cualquier procedimiento de CEPM debe cumplir las cuatro condiciones siguientes: 1) disponibilidad de una respuesta a la pregunta: «¿Está el proceso en control?»; 2) especificación de la probabilidad global para el evento «Procedimiento de diagnóstico de un estado fuera de control»; 3) se deben tomar en consideración las relaciones entre las variables-atributos; y, 4) disponibilidad de una respuesta a la pregunta: «¿Cuál es el problema, si el proceso está fuera de control?». Hotelling (1947) propuso el uso de una gráfica de control multivariante basado en su estadístico  $T^2$ -Hotelling asumiendo que la distribución de variables aleatorias es normal multivariante. El procedimiento de control multivariante basado en el estadístico  $T^2$ -Hotelling posee las cuatro características establecidas por Jackson.

Alt (1985) ha señalado que en las aplicaciones de control de calidad multivariante se debe tener cuidado al seleccionar los límites de control para el estadístico  $T^2$ -Hotelling, con base en la forma en que se esté usando la gráfica. Existen dos fases distintas en la utilización de las gráficas de control. La Fase I se dirige a la estimación de los parámetros del proceso y está conformada por dos etapas: la Etapa I consiste en el examen retrospectivo de la conducta de los subgrupos previamente definidos; la Etapa II se refiere al examen prospectivo de futuros subgrupos. La Fase II utiliza los valores especificados para los parámetros del proceso.

El objetivo de la Fase I es determinar si el proceso está en control estadístico mediante el uso de gráficas de control y estimar los parámetros en control del proceso. La dificultad se presenta en la posibilidad de que los estimadores de los parámetros estén afectados por causas especiales, posiblemente enmascarando su presencia. En la etapa prospectiva, las gráficas de control se usan para detectar desviaciones de los parámetros estadísticos estimados en la etapa precedente. Es muy importante distinguir entre el uso de una gráfica de control para determinar si un proceso ha estado o no en control estadístico (Fase I), y su uso prospectivo con muestras tomadas secuencialmente en el tiempo para detectar cambios de un proceso en el control. En la Fase I, el uso de las gráficas de control suele ser iterativo, mientras que en la Fase II, las gráficas se usan para probar si el proceso permanece en control cuando se extraen futuros subgrupos.

Existen extensiones multivariantes para todas las clases de gráficas de control univariante, tales como gráficas de control tipo Shewhart multivariante, gráficas de control de sumas acumuladas multivariante (CUSUM) y gráficas de control de promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA) multivariante. Además de ello, existen procedimientos únicos en la construcción de las gráficas de control multivariante, basados en estadísticos

multivariantes. Los esquemas de CUSUM multivariante se deben a Woodall y Ncube (1985), quienes proponen el esquema múltiple univariante CUSUM, a Healy (1987), a Crosier (1988), como también a Pignatiello y Runger (1990), quienes definen la estimación de la media CUSUM. La gráfica de control EWMA multivariante fue propuesta por Lowry *et al.* (1992).

### 3. IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES FUERA DE CONTROL EN UNA GRÁFICA DE CONTROL MULTIVARIANTE

En caso de que una gráfica de control univariante detecte una señal fuera de control, el investigador puede determinar cuál es el problema y darle una solución, debido a que una gráfica univariante analiza sólo una variable. En una gráfica de control multivariante la solución a este problema no es expedita, puesto que dicha gráfica está relacionada con más de una variable, presentándose además la posibilidad de que estén correlacionadas. En esta sección se discuten métodos para detectar cuál de las  $p$  variables analizadas está fuera de control.

Un primer enfoque a este problema fue propuesto por Alt (1985), quien sugirió el uso de límites de Bonferroni. Hayter y Tsui (1994) extendieron la idea de límites de control tipo Bonferroni, ofreciendo un procedimiento para intervalos de control simultáneo exactos para cada una de las medias de las variables, usando simulación. Una gráfica de control similar es la gráfica de control Minimax Simulada presentada por Sepúlveda y Nachlas (1997). Alt (1985) y Jackson (1991) discuten el uso de una región de control elíptica. Sin embargo este procedimiento tiene la desventaja que puede aplicarse sólo en el caso especial de analizar dos variables de calidad. Una extensión de la región de control elíptica como una solución a la interpretación del problema se muestra en Chua y Montgomery (1992).

El uso de la descomposición del estadístico  $T^2$  propuesto por Mason *et al.* (1995) se considera hoy en día de mucho valor. La idea principal de este método es descomponer el estadístico  $T^2$  en componentes independientes, de tal manera que cada componente refleje la contribución de una variable individual. El problema con este método está en que la descomposición del  $T^2$  en  $p$  componentes independientes no es única. Por ello Mason *et al.* (1997) presentan un esquema pertinente que puede reducir el esfuerzo computacional (Anexo N° 1). Las metodologías de Murphy (1987), Doganaksoy *et al.* (1991), Timm (1996) y de Runger *et al.* (1996) son casos especiales de Mason *et al.* (1995), en el procedimiento de particionar el estadístico  $T^2$ .

Jackson (1991) propuso el uso de componentes principales (CP) para monitorear un proceso multivariante. Tracy *et al.* (1992) extendieron el trabajo previo y propor-

cionan un interesante ambiente bivalente en el cual los CP tienen interpretaciones significativas.

Los CP se pueden usar para investigar cuál de las  $p$  variables es responsable de alguna señal fuera de control. Hasta ahora se han propuesto diferentes métodos que usan análisis de CP para interpretar señales fuera de control. La práctica más común es usar los  $k$  primeros CP significativos, en el caso de que una gráfica de control  $T^2$  produzca una señal fuera de control, ya que ellos pueden tener alguna interpretación física. De acuerdo con Jackson (1991), el procedimiento para monitorear un proceso multivariante usando análisis de Componentes Principales (ACP) se puede resumir del modo siguiente: para cada vector de observaciones, se obtienen los puntajes de los CP y con éstos se calcula el  $T^2$ . Si se está en control, entonces el proceso continúa. Si se está fuera de control, hay que examinar los puntajes. Significa esto que el punto en cuestión se encuentra fuera del hiperelipsoide de concentración, indicando que algún cambio ha podido ocurrir en el proceso y por tanto debe analizarse para encontrar las causas que originaron esta situación. Puesto que los CP no están correlacionados, pueden proporcionar algún discernimiento en la naturaleza de la condición fuera de control y guiar al examen de observaciones originales en particular.

Kourti y MacGregor (1996) ofrecen un enfoque diferente basado en análisis de componentes principales. El  $T^2$  se expresa en términos de puntajes de CP normalizados de las variables normalizadas. Cuando ocurre una señal fuera de control, se detectan los puntajes normalizados con valores altos y las gráficas de contribución se usan para hallar las variables responsables de la señal. Una gráfica de contribución indica cómo contribuye cada variable involucrada en el cálculo de ese puntaje. Las gráficas de contribución también son exploradas por Wasterhuis *et al.* (2000).

Fuchs y Benjamín (1994) presentaron un método para controlar simultáneamente un proceso e interpretar una señal fuera de control. Esta es una nueva gráfica (exhibición gráfica) que enfatiza la necesidad de interpretación rápida de una señal fuera de control. La gráfica de perfiles multivariante (gráfica MP) es un dispersiograma simbólico. Resúmenes de los datos para variables individuales se exhiben mediante un símbolo, mientras que la información global acerca del grupo se exhibe mediante la ubicación del símbolo sobre el dispersiograma. Se construye un símbolo para cada grupo de observaciones. El símbolo es una adopción de una gráfica de perfiles que codifica visualmente el tamaño y el signo de cada variable proveniente de su valor de referencia. Fuchs y Kenett (1998) elaboraron una macro de comandos usando el programa computacional Minitab para construir gráficas de perfiles multivariantes.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIANTES EN LA INDUSTRIA

Entender el CEPM y los conceptos de calidad y variación, tal como ellos se relacionan con procesos de manufactura, ahorra recursos mediante la reducción de desperdicios, retrabajos y otros rechazos. Involucrar a los gerentes de producción, supervisores, operadores y personal del departamento de calidad hace la aplicación de CEPM más efectiva. Sin embargo, las técnicas de CEPM no se utilizan frecuentemente en las plantas industriales, ya que existe una brecha entre los aspectos teóricos de CEP y la puesta en práctica de diversas técnicas, y por tanto el conocimiento de CEP teórico no se transfiere exitosamente al campo industrial. Esta brecha se puede reducir mediante un enfoque simple y claro que facilite la implementación de las técnicas de CEPM. En otras palabras, es necesario presentar las técnicas de CEPM en un formato de instrucción paso-a-paso que considere de manera conjunta, tanto el desarrollo del software de computación para apoyar al personal de la planta en la obtención de información de una gran cantidad de datos, como el uso de las herramientas gráficas.

Después de describir el desarrollo teórico del CEPM (Alt, 1985; Montgomery, 1991; Jackson, 1991; Tracy *et al.*, 1992; Fuchs y Kennett, 1998; Mason y Young, 2001) y las perspectivas y expectativas del campo industrial (Fermín, 1999; Alvin y Rojas, 2000; García, 2003; García *et al.*, 2004; Chen, 2005; Díaz, 2006), se presentan ciertas directrices para implementar el CEPM en la industria.

En el Cuadro N° 1 se muestran cuatro elementos de vital relevancia en la implementación del CEPM. Dichos elementos se describen a continuación en esta sección.

**Cuadro 1**

Elementos para implementar el CEPM en plantas industriales		
4.1	Plan del CEPM	1-Modelo del CEPM
		2-Diagnóstico del CEPM
		3-Control de Procesos
4.2	Entrenamiento del CEPM	
4.3	Trabajo en equipo	
4.4	Compromiso de la alta gerencia	

Fuente: elaboración propia.

##### 4.1. PLAN DEL CEPM

Se desarrollan tres herramientas prácticas: el modelo del CEPM, el Diagnóstico del CEPM y el Control de Procesos. La primera es una instrucción general para que los ingenieros de calidad aprendan a seleccionar una técnica de CEP adecuada bajo diferentes circunstancias. La segunda es una herramienta complementaria que ayuda a

los ingenieros de calidad a identificar la(s) variable(s) problemáticas, así como a reaccionar correctamente cuando ocurre un evento fuera de control. Finalmente, la tercera está conformada por herramientas adicionales para el análisis de problemas en los procesos de producción.

##### 4.1.1. MODELO DEL CEPM

Existen diversos tipos de producción. Dependiendo de la naturaleza del proceso, se aplican diferentes técnicas de CEPM a fin de obtener el mejoramiento de la calidad económicamente. En la Figura N° 1 se presenta el esquema del modelo del CEPM y, además, cada parte del esquema se explica con cierto detalle en esta sección.

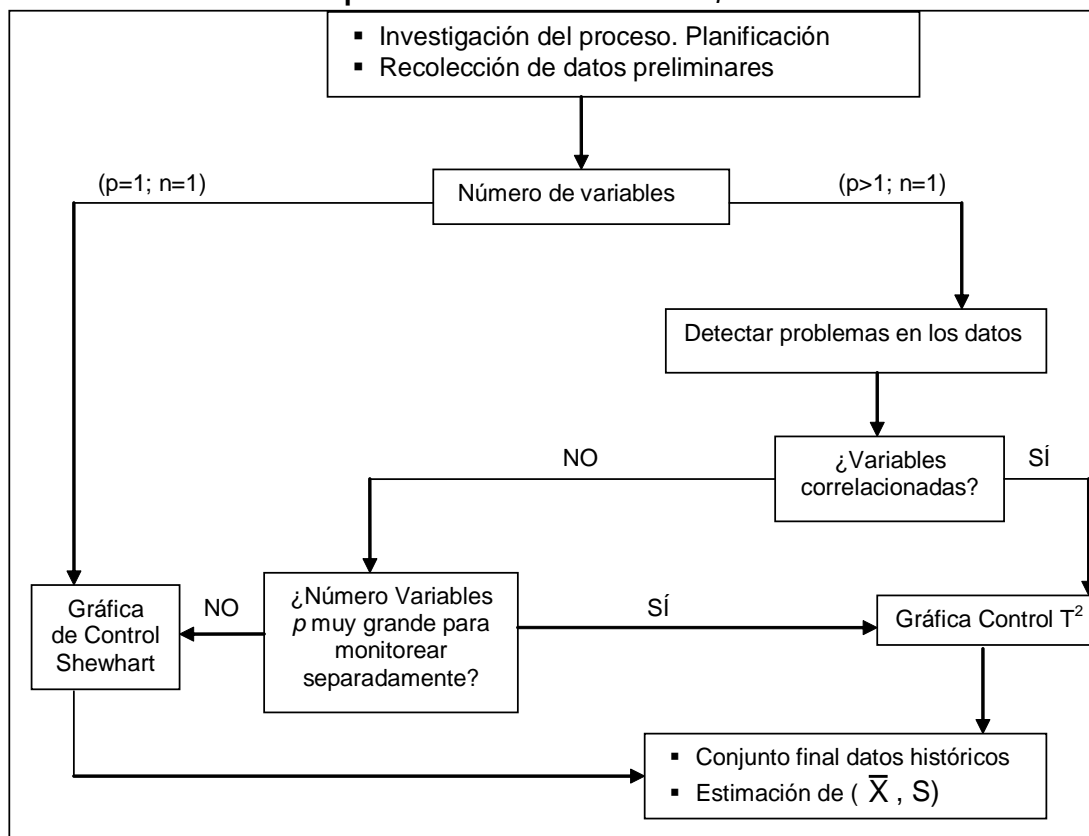
**Paso 1. Investigar el sistema del proceso.** Se crea un comité de calidad constituido por los responsables del proceso de la empresa. Dicho comité identifica la situación problemática mediante sesiones de lluvias de ideas, y da respuesta a la pregunta, ¿Dónde aplicar el procedimiento de control en el proceso, dado que existen muchas variables?

Generalmente el procedimiento de control se ubica en el área donde ocurren o pueden existir problemas con serias consecuencias, tal como lo plantea Mason y Young (2001). Por ejemplo, un procedimiento de control para un proceso industrial se puede establecer para detectar inconsistencias en el comportamiento de variables de procesamiento y mantenimiento de la calidad de producción en el componente de salida. Los pasos involucrados en la Fase I de operación implican el establecimiento de metas, estudio del proceso y la obtención de información sobre la interrelación de variables. En esta fase, consultar a los operadores de mayor experiencia y ejecutar la investigación *in situ* puede ser de mucha utilidad. Este paso es una fase de planificación ya que implica decidir, por anticipado, qué, cómo, cuándo y quién hace las cosas.

**Paso 2. Recolectar y evaluar el conjunto de datos preliminares.** Esta fase consiste en la verificación de la calidad de los datos, examinando los errores de los datos tanto humanos como electrónicos. Esto se puede llevar a cabo utilizando las herramientas gráficas de algún software, tal como MINITAB, SAS, R, SPSS, STATGRAPHICS para identificar *outliers* y, si es necesario, eliminarlos. Además de ello, se examinan las posibles relaciones entre las variables.

**Paso 3. Detección de problemas en los datos.** Se analizan aquellos problemas que pueden afectar el uso y desempeño del estadístico  $T^2$ , en contraste con los problemas de la recolección de datos estudiados en el paso 2. El estadístico  $T^2$  para una observación ( $n = 1$ ) sobre  $p$  variables se expresa como  $T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})' S^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})$ , donde  $\mathbf{X}' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ , y donde el vector de medias muestrales  $\bar{\mathbf{X}}$  representa una medida del centro del proceso. La matriz de varianzas-covarianzas  $S$  proporciona

**Figura 1**  
**Esquema del Modelo del CEPM, Fase I**



Fuente: elaboración propia.

información sobre las variables individuales y sobre la correlación entre los componentes del vector observación. El uso del estadístico  $T^2$  en el control estadístico requiere el cumplimiento de ciertos supuestos entre las variables, como son: a) ausencia de colinealidad, o redundancias exactas entre las variables del proceso, lo que puede ocurrir cuando dos variables están perfectamente (o casi perfectamente) correlacionadas. Esta anomalía puede resolverse eliminando alguna de las variables del estudio; y b) independencia entre las observaciones, requerimiento que se satisface en muchas aplicaciones; sin embargo, en ciertas aplicaciones industriales -por ejemplo, deterioro de un catalizador en una caldera de óxido de etileno-, pueden surgir dependencias de tipo temporal entre las observaciones, lo que genera problemas de autocorrelación (Mason *et al.*, 2003). Existen numerosos procedimientos estadísticos para detectar problemas de autocorrelación. Cabe señalar que la detección de autocorrelación no prohíbe el uso del procedimiento  $T^2$ , simplemente hay que ajustar los datos ante la presencia de este tipo de depen-

dencia, tal como se plantea en Mason, Tracy y Young (1996). Con la investigación y resolución de los problemas de datos, el investigador debe depurar el conjunto de datos preliminares de *outlier* estadísticos. El proceso de depuración consiste en calcular el valor  $T^2$  para cada observación y compararlo con un valor de la distancia crítica, denominado el límite de control superior (LCS). Se eliminan las observaciones con un  $T^2 > \text{LCS}$ , después de investigar las causas; en caso contrario, dichas observaciones se retienen. El proceso continúa hasta obtener un *conjunto de datos homogéneos*, con los que se estiman  $\bar{X}$  y  $S$ , para construir el estadístico de control  $T^2$  y así monitorear futuras observaciones. La construcción del conjunto de datos homogéneos corresponde a la fase de operación I (FO\_I), mientras que el monitoreo de nuevas observaciones constituye la fase de operación II (FO\_II).

**Paso 4. Inicio de la Fase de Operación II.** El correspondiente procedimiento de control en esta fase de operaciones se basa en un LCS diferente al usado en la FO\_I. El valor del LCS para una FO\_I se basa en la distribución de

probabilidad  $\beta$ , mientras que el valor del LCS para una FO\_II se basa en una distribución  $F$ . Después que se calculan los valores de  $T^2$  para las nuevas observaciones y dichos valores se comparan con este nuevo LCS. Se emite una señal fuera de control para una observación ese valor excede el LCS. En la Figura N° 2 se muestra el esquema del Modelo del CEPM Fase II.

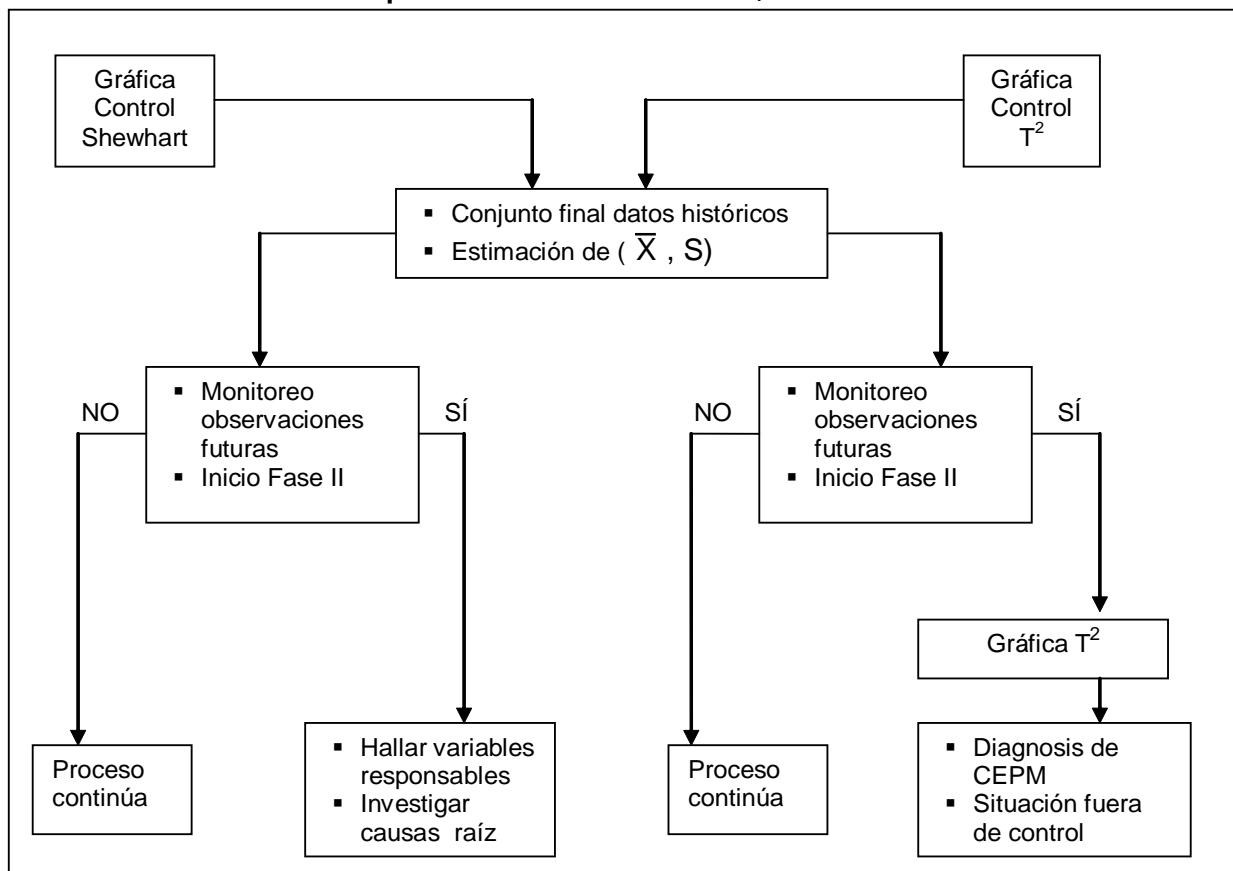
**Patrón sistemático en las gráficas de control para procesos multivariantes.** El patrón sistemático que ocurre en las gráficas de control a menudo se usa como indicador de fuentes extrañas de la variación del proceso. Cabe señalar que todavía pocas investigaciones se han llevado a cabo en la detección de patrones sistemáticos en gráficas de control  $T^2$ . Para gráficas de control de procesos multivariantes, la información de patrón sistemático es difícil de interpretar porque el valor  $T^2$  está relacionado con todas las variables. Cualquier patrón sistemático o no aleatorio que ocurre en una gráfica de control indica falta de control estadístico para el proceso. Debido a que el estadístico  $T^2$  tiene una distribución no-normal, no es apropiado aplicar las reglas de las corridas planteadas en

la Western Electric (Western Electric, 1956) a la correspondiente gráfica de control  $T^2$  (Mason *et al.*, 2003). Adicionalmente, solamente reglas de corridas limitadas han sido estudiadas para las gráficas de control  $T^2$ . Por ejemplo, Bozzello (1989) discutió el uso de reglas de las corridas con una gráfica de control  $T^2$  en el caso donde los vectores son tomados de una distribución normal bivalente. Aparisi *et al.* (2004) investigaron el efecto del desempeño de gráficas  $c^2$  de Hotelling complementadas con reglas de las corridas.

#### 4.1.2. DIAGNÓSTICO DEL CEPM

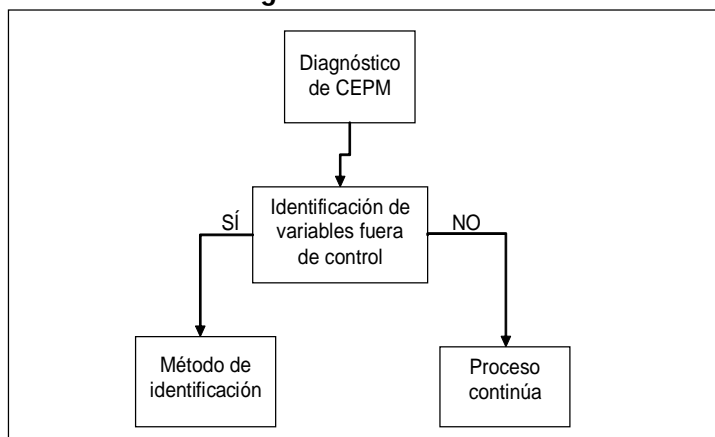
El diagnóstico de CEPM es aplicable cuando ocurre una situación fuera de control. Aunque la gráfica de control del CEPM se usa principalmente para monitorear dos o más variables correlacionadas entre si, también es una buena herramienta para reducir el trabajo de monitorear muchas gráficas de control de Shewhart separadamente. Se presenta un esquema simplificado del diagnóstico del CEPM en la Figura N° 3.

**Figura 2**  
**Esquema del Modelo del CEPM, Fase II**



Fuente: elaboración propia.

**Figura 3**  
**Diagnóstico del CEPM**



Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.3. CONTROL DE PROCESOS

Cabe señalar que las gráficas de control de procesos sólo monitorean la conducta de las variables. Así que se tendrán dos consecuencias cuando se aplique la gráfica de control del proceso. La primera es que el proceso continúa cuando no exista señal de la gráfica de control. La segunda es que cuando la gráfica de control muestre una situación fuera de control, será necesario identificar las variables responsables de dicha situación. Se debe notar que la identificación de las variables responsables no significa que se hayan localizado las causas de raíz de una situación fuera de control. Mientras no se identifiquen estas causas y no se den los pasos necesarios para retornar a la situación normal, el proceso no se ajusta automáticamente. Por eso se necesitan herramientas adicionales que puedan sistemáticamente ayudar a encontrar las causas de raíz potenciales cuando se encuentra una situación fuera de control. En el Cuadro N° 2 se resumen las herramientas más utilizadas en la práctica:

La combinación de las actividades involucradas en la técnica de CEPM, tales como monitoreo del proceso, diagnóstico de las variables responsables para la situación fuera de control y la estrategia PHVA, forma un continuo para mejorar permanentemente el desempeño del proceso.

#### 4.2. ENTRENAMIENTO DEL CEPM

Se recomiendan diferentes niveles de formación para entrenar a los empleados de la empresa. En primer lugar, es necesario proporcionar un nivel avanzado de educación de CEPM a los ingenieros de calidad adscritos a la Gerencia de Aseguramiento de la Calidad. Al inicio de la implementación los ingenieros de calidad deben estar familiarizados y ejecutar todos los pasos mencionados en el Plan de CEPM. El Plan de CEPM es una instrucción genérica y los ingenieros de calidad deberían aplicarlo y ajustarlo -si es necesario- a la situación real. Después de la construcción de los procedimientos detallados, ellos pueden asignar las tareas a los analistas de calidad. En segundo lugar se proporciona un nivel de educación de CEPM a todos los analistas de calidad. Dicho personal debe familiarizarse con los conceptos de CEPM y conducir correctamente todas las tareas relevantes asignadas por los ingenieros de calidad. El nivel más bajo de los empleados debería ser capaz de recolectar los datos apropiadamente y reaccionar correctamente a un evento fuera de control de acuerdo con el Plan de Acción Fuera de Control (PAFC). En tercer lugar se proporciona el curso de nivel moderado para los empleados de la gerencia, con el fin de evitar la brecha comunicacional entre ellos y el resto de los empleados de la empresa. Los empleados de la gerencia deben estar familiarizados con todos los procedimientos que se suceden durante el monitoreo del proceso, aunque no ejecuten el análisis estadístico directamente.

**Cuadro 2**

Resumen de herramientas en el análisis de problemas en control de procesos	
a) Matriz de gráficas de dispersión	- Representa gráficamente varias variables simultáneamente.
b) Diagrama de causa-efecto	- Herramienta recomendada para describir las causas de raíz potenciales de un problema no deseado (Ishikawa, 1985; Montgomery, 1991).
c) El plan de acción fuera de control (PAFC)	- Contiene todo el conocimiento diagnóstico, y las posibles razones y remedios de una situación fuera de control.
d) La rueda de Shewhart-Deming (PHVA)	- Es una de las estrategias para lograr el mejoramiento del proceso. - Se conoce como el ciclo PHVA: Planificar, Hacer, Verificar, Actuar. - La idea PHVA fue originada por Shewhart (1931) y más tarde popularizada por Deming (1989).

Fuente: elaboración propia.



#### 4.3. TRABAJO EN EQUIPO

El plan de CEPM se considera como la herramienta para conducir el monitoreo de CEPM, mientras que el entrenamiento de CEPM hace que el usuario entienda cómo aplicar correctamente dicha herramienta. Durante el entrenamiento de CEPM generalmente se definen tres niveles diferentes de usuarios: nivel avanzado (ingenieros de calidad en el centro de investigación), nivel básico (analista de calidad) y nivel moderado (empleados de la gerencia). El trabajo de implementación se conduce por un equipo de trabajo integrado por ingenieros y analistas de calidad. El enfoque de equipo describe el propósito de los ingenieros y analistas de calidad y cómo deben conducir el trabajo usando las habilidades con las cuales han sido entrenados en el paso previo; además, permite que una persona compense con su fuerza la debilidad de otra y que todo el personal sume esfuerzos para poder resolver posibles problemas de la organización. El propósito y las funciones de los diferentes grupos se describen en el Cuadro N° 3.

#### 4.4. COMPROMISO DE LA GERENCIA

El compromiso de la gerencia es crucial para el éxito de la implementación. El progreso de la implementación total debe ser monitoreado por los empleados de la gerencia. Se debe establecer un sistema de auditoría. Los empleados de la gerencia no sólo monitorean el desempeño del proceso, sino que también impulsan a los analistas de calidad a mejorar su trabajo.

#### 5. IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIANTES EN UNA PLANTA DE PROCESAMIENTO DE ALIMENTOS

En esta sección se presenta un caso real proveniente de una planta procesadora de alimentos. En el mismo se implementó el CEPM y se validaron los enfoques desarrollados en la sección 4.1, específicamente el Modelo del CEPM y el Diagnóstico de CEPM.

#### 5.1. CASO DE ESTUDIO: PROCESO DE FABRICACIÓN DE HARINA PRECOCIDA DE MAÍZ

El caso de estudio en este artículo es un proceso de fabricación de harina precocida de maíz. Este proceso se describe de la siguiente manera: la harina de maíz precocida y enriquecida es el producto obtenido a partir del endospermo de granos de maíz (*Zea mays L.*) clasificados para consumo humano que han sido sometidos a procesos de limpieza, desgerminación, precocción y molienda, a los cuales se les ha añadido una premezcla ferrovitáminica (COVENIN, 1996).

El procesamiento del maíz para la producción de harina precocida consta básicamente de tres (3) etapas: desgerminación, laminación y molienda.

- *Desgerminación.* La operación de desgerminación consiste en someter al maíz previamente acondicionado a un tratamiento mecánico en un equipo denominado pulidor. En esta fase se separan los componentes del grano, es decir, se obtiene un flujo de material constituido principalmente por germen, endospermos de pequeñas granulometrías y concha. Este flujo se denomina material extraíble. La otra fracción o flujo de material obtenido a partir del pulidor es el endospermo de mayor granulometría, el cual es sometido a un proceso de limpieza y selección para utilizarlo en el próximo proceso que es la laminación.

- *Laminación.* Este proceso se resume en la transformación del endospermo terminado proveniente de la fase de desgerminación en hojuelas pre gelatinizadas. El endospermo es sometido a un proceso hidrotérmico de alta presión que proporciona a los almidones la susceptibilidad de absorber agua. A continuación se hace la descripción de este proceso. El endospermo terminado se mezcla con agua para humidificarlo convenientemente y, posteriormente, se transfiere a un tanque de acondicionamiento para facilitar la penetración del agua. Luego es enviado a unas cocinas verticales donde se le adiciona vapor saturado, entrando luego a los rodillos laminadores donde se somete a una presión cercana a los 40 bar. En

**Cuadro 3**

Funciones de los grupos de trabajo	
Ingenieros de Calidad	1. Establecer el plan de CEPM para ajustar la situación real
	2. Construir el plan de acción fuera de control (PAFC)
	3. Conducir el entrenamiento interno de los analistas de calidad complejos
	5. Supervisar el trabajo de los analistas de calidad
Analistas de Calidad	1. Implementar el Plan CEPM definido por los ingenieros de calidad
	2. Resolver la situación fuera de control de acuerdo con el plan PAFC
	3. Apoyar a los ingenieros de calidad en mantener el plan PAFC

Fuente: elaboración propia.

esta fase y por la presión recibida, el endospermo es transformado en hojuelas de un espesor cercano a las 50 micras. Estas hojuelas, con una humedad cercana al 25%, reciben un tratamiento de secado para reducir su humedad hasta un 12%; finalmente se someten a un proceso de enfriamiento y pre molienda, para transferirlas posteriormente a un silo del cual pasarán a la sección de molienda.

- **Molienda.** Es un proceso que consiste principalmente en transformar las hojuelas en un producto farináceo, de granulometría variable, a través de una serie de bancos de molienda y tamices. Las granulometrías obtenidas a partir de la clasificación en los tamizadores cumplen con los requisitos de la norma venezolana para harina de maíz refinada (COVENIN, 1996). La harina así terminada es empacada en envases de 1 kg.

#### 5.2. IMPLEMENTACIÓN DE CEPM

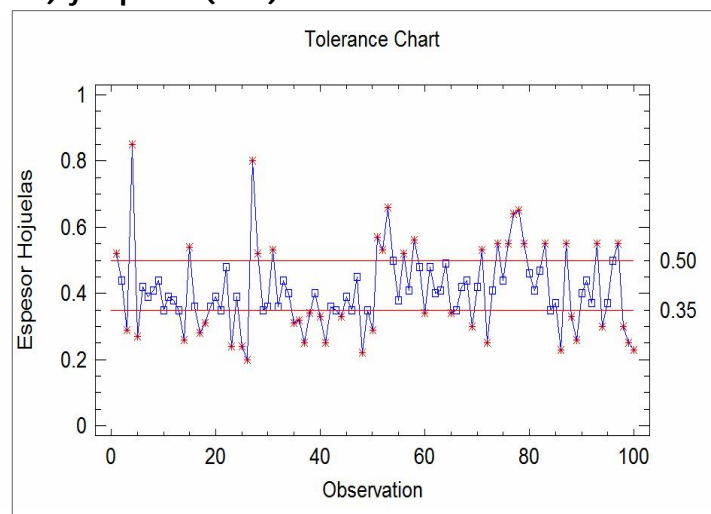
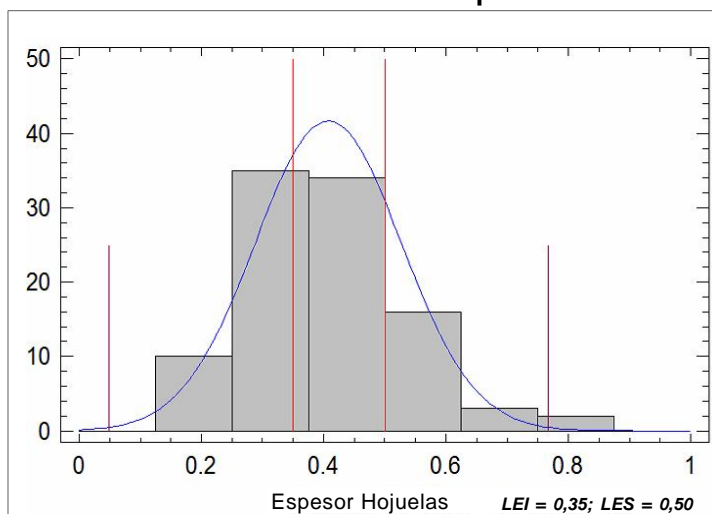
La empresa de producción de harina precocida estaba experimentando alta variación en el espesor de las hojuelas (los límites de especificación inferior y superior del espesor de las hojuelas están fijados en LEI = 0,35 mm y LES = 0,50 mm, respectivamente). Si dicho espesor está por encima del LES, se produce una disminución de la capacidad de formación de masa y una alteración de su suavidad, características diferenciadoras de la calidad de los productos. Mientras que valores de espesor por debajo del LEI dan como resultado una absorción muy rápida del agua durante el proceso de amasado, lo cual se tradu-

ce en masas duras y difíciles de moldear para hacer arepas. Las desviaciones en el espesor de las hojuelas afectan características sensoriales y reológicas que influyen en la apreciación y valoración de atributos cualitativos por parte de los consumidores. En consecuencia, es necesario lograr una reducción significativa en la variación del espesor de las hojuelas de maíz. Este caso de estudio muestra cómo se usaron las herramientas de CEPM para lograr reducciones significativas en la variación del espesor de las hojuelas, y en consecuencia obtener harina pre cocida con características de calidad de alto valor para el consumidor. Los pasos seguidos se detallan a continuación.

**Paso 1. Investigar el sistema del proceso.** Se creó un comité de calidad conformado por los responsables del proceso de la empresa. Después de diversas sesiones de lluvias de ideas se analizó la situación problemática del proceso de laminación del endospermo y se recolectaron datos del espesor de las hojuelas laminadas. Luego se construyó un histograma mostrando la distribución de los datos del espesor de las hojuelas laminadas (mm), conjuntamente con los límites LEI y LES, apreciándose una alta variabilidad en la muestra de espesores de hojuelas laminadas. El histograma y su correspondiente carta de tolerancia se muestran en la Figura N° 4.

Posteriormente se elaboró un diagrama de causa-efecto, con el fin de identificar las variables que influyen en que las hojuelas estén fuera de especificación. En la Figura N° 5 se presenta el diagrama de causa-efecto para el

**Figura 4**  
**Histograma y carta de tolerancia. Espesor de hojuelas laminadas, con sus límites de especificación inferior (LEI) y superior (LES)**

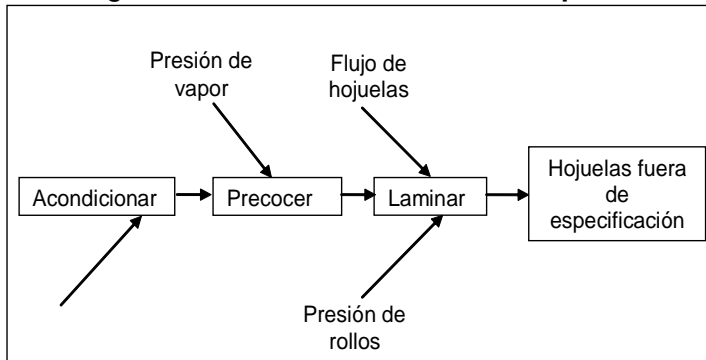


Fuente: MAZORCA, Departamento de Control de Calidad (Cumaná, estado Sucre).

proceso de laminación de hojuelas, donde se visualizan las etapas necesarias para el laminado de las hojuelas, con las variables críticas relevantes en estas etapas que influyen en las especificaciones de las hojuelas. En el Cuadro N° 4 se listan las variables que influyen en el espesor de las hojuelas con sus respectivos límites de especificación.

**Figura 5**

**Diagrama de causa-efecto. Análisis del proceso**



Fuente: elaboración propia.

**Cuadro 4**

**Variables que influyen en el proceso de laminación, con sus respectivos límites de especificaciones inferior y superior (LEI, LES)**

Variables	LEI	LES
1-Flujo de hojuelas (kg/hora)	8	10
2-Humedad del endospermo (%)	16	18
3-Presión de rollos (bar)	35	40

Fuente: elaboración propia.

**Paso 2. Recolectar y evaluar el conjunto de datos preliminares.** Para ello se recolectó un conjunto de datos preliminares de las variables relevantes e influyentes en la obtención de hojuelas fuera de especificación en el laminado del endospermo. Se recolectaron  $m = 25$  subgrupos, cada uno de tamaño  $n = 1$ , sobre  $p = 3$  variables de calidad observadas en cada muestra. Las variables fueron:  $x_1$  (flujo de hojuelas, en kg/hora),  $x_2$  (humedad del endospermo, en %) y  $x_3$  (presión de rollos, en bar). Una vez que se habían identificado las variables influyentes en la obtención de hojuelas fuera de especificaciones, se construyó una matriz de gráficas de dispersión para las 3 variables. En este caso las variables presentaron una correlación moderadamente baja.

**Paso 3. Detección de problemas en los datos.** Luego se calcularon los valores del estadístico  $T^2$  para cada una de las 25 observaciones. Todo esto se consideró como la Fase I, con  $\alpha=0,05$ . Los límites de control superior e inferior se calcularon con las siguientes ecuaciones:

$$LCS = \frac{(m-1)^2}{m} B_{\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}} = 8,133$$

$$LCI = \frac{(m-1)^2}{m} B_{\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}} = 0,230$$

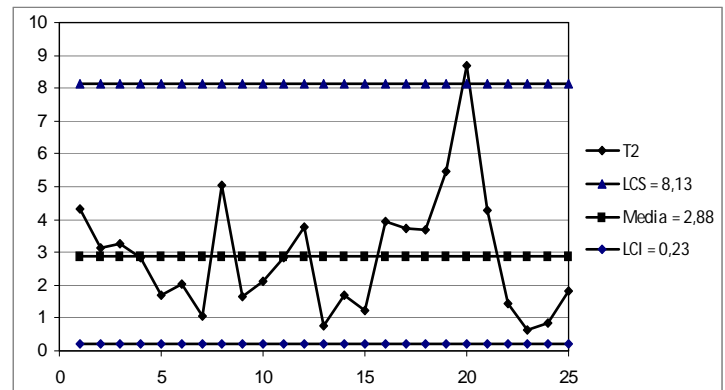
$B_{\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}}$ : (1- $\alpha$ ) percentil de la distribución Beta

Parámetros:  $\frac{p}{2}$  y  $\frac{m-p-1}{2}$ ;  $m = 25$ ;  $p=3$ ;  $\alpha = 0,05$ ; Media = 2,402

En la Figura N° 6 se muestra la gráfica de control  $T^2$  para observaciones individuales, para los datos recolectados en el proceso de laminación-. Allí se nota que la observación 20 excede el límite de control superior.

**Figura 6**

**Gráfica de control  $T^2$  para observaciones individuales del proceso de laminación de hojuelas de maíz (Fase I)**

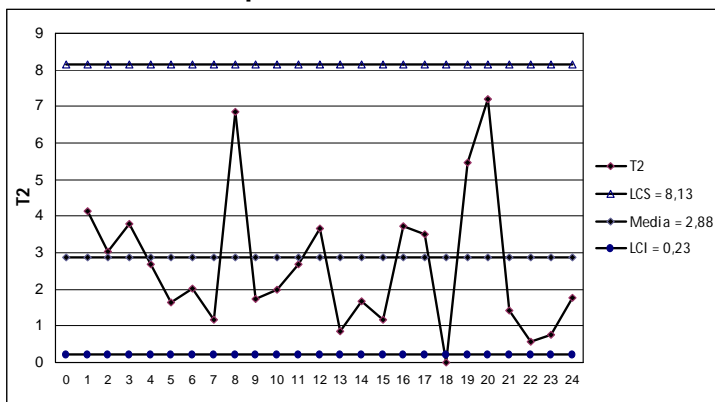


Fuente: MAZORCA, Departamento de Control de Calidad (Cumaná, estado Sucre).

Se investigaron las causas por las cuales la observación 20 tuvo un  $T^2 = 8,68 > LCS$ , concluyéndose que se debió a un inadecuado plan de mantenimiento. Conocida la causa se eliminó dicha observación y se calcularon nuevamente los estimados de los parámetros  $\bar{\bar{X}}$  y  $S$ , el límite de control superior y el estadístico  $T^2$ . La Figura N° 7 muestra que los puntos no excedían el límite de control superior, por lo que se había establecido el control estadístico para el proceso de laminación del endospermo y de este modo se obtuvo un *conjunto de datos homogéneos*.

**Paso 4. Inicio de la fase de operación II.** Una vez que el conjunto de datos había sido depurado, se prosiguió con la Fase II, a fin de monitorear las futuras observaciones. En la Fase II el estadístico  $T^2$ -Hotelling siguió una distribución F con grados de libertad ( $p$ ;  $m-p$ ). El cálculo de los límites de control produjo los siguientes resultados:  $LCS = 13,07$  y  $LCI = 0,24$  (ver Anexo N° 2).

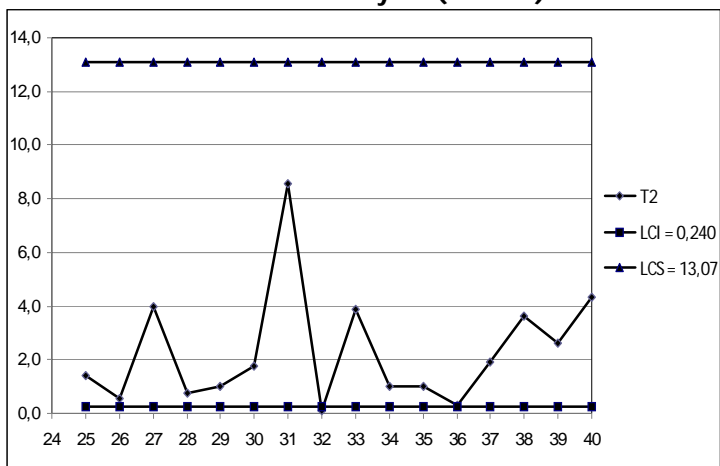
**Figura 7**  
**Gráfica de control  $T^2$  para observaciones individuales.**  
**Conjunto de datos homogéneos provenientes**  
**del proceso de laminación**



Fuente: MAZORCA, Departamento de Control de Calidad (Cumaná, estado Sucre).

Luego se calculó el estadístico  $T^2$ -Hotelling para las observaciones comprendidas entre la observación 25 y la observación 40. Se consideró que una observación estaba fuera de control si el estadístico  $T^2$ -Hotelling era mayor que el LCS o menor que el LCI. En la Figura N° 8 se muestra la gráfica para dichas observaciones y se detecta la observación 32 como una situación fuera de control.

**Figura 8**  
**Gráfica  $T^2$  para los datos comprendidos entre la**  
**observación 25 y 40 (Fase II)**



Fuente: MAZORCA, Departamento de Control de Calidad (Cumaná, estado Sucre).

**Diagnóstico del CEP.** Un enfoque muy útil para diagnosticar una señal fuera de control es el enfoque de descomposición de  $T^2$  propuesto por *Mason et al.* (1995). En

este estudio se calculó el estadístico  $T^2$  Hotelling y se graficó para las observaciones 25 hasta la 40. Se detectó la observación 32 ( $X_{32} = (10,3 \ 17 \ 38)'$ ) como una observación anormal ( $T^2_{(32)} = 0,09141$ ). Por tratarse de una observación multivariante puede ocurrir que: a) una o varias variables presentaran valores fuera de los límites de control univariantes; b) la observación representa una ruptura en la estructura de correlaciones; y, c) ambas situaciones se presentan simultáneamente. Las observaciones multivariantes se interpretaron utilizando la técnica de descomposición de la  $T^2$ -Hotelling, propuesta por *Mason et al.* (1997) (Anexo N° 1). Seguidamente se presentan detalles del diagnóstico estadístico con su correspondiente interpretación en el proceso de producción, a objeto de explicar el origen de la falla para cada caso.

1. Se calcula el estadístico

$$T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{s_j^2} \text{ individual. Se compara con:}$$

$$LCS = \left( \frac{m+1}{m} \right) F_{\alpha,1,m-1} = \frac{24+1}{24} F_{0,025,1,24-1} = 0,001,$$

para todo componente del vector  $X$ . En el Cuadro N° 4 se muestran los valores individuales de  $T_j^2$  y su condición. Las variables con el estadístico  $T^2$  significativo están fuera de control individual y no es necesario verificar su relación con otras variables. Debe verificarse si el subvector con las restantes  $k$  variables produce alguna señal.

**Cuadro 4**

$T_j^2$ Individual. Descomposición del $T^2$			
Variable	$T_j^2$ Individual	Condición de Control Individual	Valores críticos
$x_1$	$T_1^2 = 0,000$	Señal $X_1$ fuera del límite de control	0,001
$x_2$	$T_2^2 = 0,060$	Individualmente en control	0,001
$x_3$	$T_3^2 = 0,007$	Individualmente en control	0,001

Fuente: elaboración propia.

2. Se descarta  $x_1$  y se verifica si el subvector emite una señal o no. Como el subvector  $(T^2 - T_1^2) = 0,09141 - 0,00 = 0,09141$  no es significativo, se concluye que  $x_1$  (flujo de hojuelas) es la variable problemática. El incremento en el flujo de endospermo y por ende, de la producción de hojuelas afecta la variable expansión, ya que el producto tarda menos tiempo en la cocina.

Con toda esta información se planificó una reunión con los operadores, analistas de calidad e ingenieros de producción. Se analizaron las gráficas obtenidas del pro-

ceso de laminación. Éstas mostraron que las variables que inciden sobre el espesor de hojuelas eran la presión de los rodillos y la humedad en el endospermo. Surgió, durante la tormenta de ideas, la necesidad de realizar una revisión exhaustiva de los equipos de laminación, ajustar dispositivos hidráulicos y realizar cambios en los rodamientos. Así mismo, para optimizar el acondicionamiento, se decidió incrementar el flujo de agua a nivel de los pre mojadores de endospermo. Estas actividades fueron planificadas conjuntamente por el departamento de Mantenimiento y el de Calidad. Con posterioridad al cumplimiento de dicho plan se tomaron muestras de los espesores de las hojuelas y se prepararon harinas a nivel de laboratorio para verificar las propiedades reológicas y sensoriales. Los resultados mostraron que las decisiones tomadas fueron las más acertadas.

## 6. CONCLUSIONES

- El control estadístico de procesos multivariantes es particularmente importante hoy en día, debido a procedimientos de inspección automática que hacen relativamente fácil medir varios parámetros en cada unidad de producto manufacturado. Muchas plantas de procesos y fabricantes de semiconductores, por ejemplo, mantienen rutinariamente voluminosas bases de datos de calidad de cientos de variables. El monitoreo o análisis de estos datos con procedimientos de CEP univariantes es a menudo ineficiente. Por esta razón el uso de métodos multivariantes se ha incrementado en los años recientes.

- En este trabajo se presentaron los pasos tomados por una empresa de alimentos para implementar el CEPM en uno de sus procesos -proceso de laminación- como elemento de un programa de mejoramiento de calidad global, llevado a cabo por el departamento de aseguramiento de calidad. Se muestra que el uso de CEPM en plantas industriales es una herramienta de tiempo real factible, con el potencial de ser replicado en otras plantas industriales a fin de monitorear áreas problemáticas.

- Específicamente, la herramienta estadística empleada fue el gráfico de control multivariante  $T^2$ , que demostró ser efectivo para detectar la existencia de cambios en el proceso de laminación del endospermo de granos de maíz para la fabricación de harina pre cocida, capaces de generar problemas en el producto.

- El análisis de la descomposición del estadístico  $T^2$  facilitó el diagnóstico de los cambios en el proceso que dieron origen al problema, dotando al investigador de un conjunto de indicadores capaces de mostrar las relaciones entre las variables definidas por datos históricos que se han quebrantado en la señal encontrada.

- Respecto a los gráficos de control multivariante, la interpretación de puntos fuera de control ha sido uno de

los problemas más difíciles de superar, a pesar de que un amplio número de investigadores han dedicado importantes esfuerzos en proponer métodos para la descomposición e interpretación. La revisión bibliográfica durante los últimos años en el país indica la existencia de muy pocos trabajos sobre el tema (Fermín, 1999; Alvin y Rojas, 2000; García, 2003; García *et al.*, 2004; Díaz, 2006), utilizando el CEPM en plantas industriales. Es por ello que este trabajo se incorpora como una contribución adicional a esta área especializada del estudio de la calidad global.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALT, F. 1985. «Multivariate Quality Control». En: Kotz, S. y Jonson N. John Wiley & Sons (Eds.), *Encyclopedia of Statistical Sciences* (6ª edición), New York: Wiley, pp. 110-122.
- ALT, F.; SMITH, N. 1988. «Multivariate Process Control». En: P. R. Krishnaiah y C. R. Rao (Eds.), *Handbook of Statistical*, Vol. 7, Amsterdam: North-Holland, pp. 333-351.
- ALVIN, N.; ROJAS, D. 2000. *Aplicación de técnicas de control estadístico de calidad multivariante al proceso de laminación de endospermo para mejorar la elaboración de la harina precocida en una empresa de alimentos*. Anzoátegui: Universidad de Oriente. Trabajo de grado (inédito).
- APARISI, F; CHAMP, C.; GARCÍA-DÍAZ, C. 2004. «A performance Analysis of Hotelling's  $c^2$  Control Chart with Supplementary Runs Rules». En: *Quality Engineering*, Vol. 16, N° 3: 359-368.
- BOZZELLO, M. L. 1989. *A comparative Run length Analysis of the Hotelling  $T^2$  Control Chart and Multiple Shewhart Charts and Run Rules*. Chicago: Department of mathematics and Statistics, University of Southern Illinois at Edwardsville (unpublished M.Sc. Thesis).
- CHEN, W. 2005. *Multivariate Statistical Process Control in Industrial Plants*. La Haya: Department of Engineering and Policy Analysis. Faculty of Technology, Policy and Management, Delft University of Technology (Master degree thesis).
- CHUA, M, K.; MONTGOMERY, D. C. 1992. «Investigation and characterization of a control scheme for multivariate quality control». En: *Quality and Reliability Engineering International*, 8: 37-44.
- COMISIÓN VENEZOLANA DE NORMAS INDUSTRIALES, COVENIN. 1996. *Norma venezolana COVENIN 2135-96. Harina de maíz precocida*. Caracas: COVENIN.
- PIGNATIELLO, J. J.; RUNGER, G. C. 1990. «Comparisons of multivariate CUSUM charts». En: *Journal of Quality Technology*, 22: 173-186.
- CROSIER R., B. 1988. «Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes». En: *Technometrics*, 30: 291-303.
- DEMING, W, E. 1989. *Calidad, Productividad y Competitividad la salida de la crisis*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos, S. A.

- DIAZ, F. 2006. *Índice de capacidad de procesos bivariantes: Aplicación a la industria de alimentos*. Tesis de maestría en Matemática. Cumaná: Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre.
- DOGANAKSOY, N.; FALTIN, F. W.; TUCKER, W. T. 1991. «Identification of out-of-control multivariate characteristic in a multivariable manufacturing environment». En: *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 20: 2.775-2.790.
- FERMIN, J. S. 1999. *Aplicaciones de gráficas de control multivariante para observaciones individuales en el proceso de elaboración de harina*. Ponencia en la 49ª Convención Anual de la ASOVAC, Universidad Bicentennial de Aragua, estado Aragua.
- FUCHS, C.; BENJAMÍN, Y. 1994. «Multivariate profile charts for statistical process control». En: *Technometrics*, 36: 182-195.
- FUCHS, C.; KENNET, R. S. 1998. *Multivariate Quality Control*. New York: Marcel Dekker Inc.
- GARCÍA, M. 2003. *Comparación de Gráficas de Control Multivariantes para Observaciones Individuales: Aplicación en la Industria de Alimentos*. Cumaná: Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre (trabajo de grado inédito).
- GARCÍA, T.; VÁSQUEZ, M.; GARCÍA, J. 2004. «Efectos sobre la calidad del papel higiénico cuando se producen outliers multivariantes no detectables por los gráficos de control univariante». En: *Revista de Ingeniería*, Vol. 11, N° 2 (agosto): 67-77.
- HAYTER, A. J.; TSUI, K. L. 1994. «Identification and quantification in multivariate quality control problems». En: *Journal of Quality Technology*, 26: 197-208.
- HEALY, J. D. 1987. «A note on multivariate CUSUM procedures». En: *Technometrics*, 29: 409-412.
- HOTELLING, H. 1947. «Multivariate quality control-Illustrated by the air testing of simple bombsights». En: Eisenhart, C.; Hastay, M. y Wallis, W. A. (Eds.), *Techniques of Statistical Analysis*, New York: McGraw Hill, pp. 111-184.
- ISHIKAWA, K. 1985. *¿Qué es el control de calidad? La modalidad japonesa*. Caracas: Editorial Norma.
- JACKSON, J. E. 1991. *An user guide to principal components*. New York: John Wiley.
- KOURTI, T.; MACGREGOR, J. F. 1996. «Multivariate SPC methods for Process and Product Monitoring». En: *Journal of Quality Technology*, 28: 409-428.
- LOWRY, C. A.; WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W.; RIDGON, S. E. 1992. «A multivariate EWMA control chart». En: *Technometrics*, 34: 46-53.
- MASON, R. L.; TRACY, N. D.; YOUNG, J. C. 1995. «Decomposition of  $T^2$  for multivariate control chart interpretation». *Journal of Quality Technology*, 27: 99-108.
- MASON, R. L.; YOUNG, J. C. 2001. «Implementing Multivariate Statistical Process Control using Hotelling's  $T^2$  Statistics». En: *Quality Progress*, 1 (April): 71-73.
- MASON, R. L.; TRACY, N. D.; YOUNG, J. C. 1997. «A practical approach for interpreting multivariate  $T^2$  control chart signals». En: *Journal of Quality Technology*, 29: 396-406.
- MASON, R. L.; TRACY, N. D.; YOUNG, J. C. 1996. «Monitoring a multivariate step process». En: *Journal of Quality Technology*, 28: 39-50.
- MASON, R. L.; YOUNG, J. C. 1999. «Improving the sensitivity of the  $T^2$  statistic in multivariate process control». En: *Journal of Quality Technology*, 31: 155-165.
- MASON, R. L.; CHOU, Y.; SULLIVAN, J. H.; STOUMBOS, Z. G.; YOUNG, J. C. 2003. «Systematic Patterns in  $T^2$  charts». En: *Journal of Quality Technology*, Vol. 35, N° 1: 47-58.
- MARAVELAKIS, P. E.; BERSIMIS, S.; PANARETOS, J.; PSARAKIS, S. 2002. «On identifying the out of control variable in a multivariate control chart». En: *Communications in Statistics-Theory and methods*, 31: 2.391-2.408.
- MONTGOMERY D. C. 1991. *Control Estadístico de la calidad*. México: Grupo editorial Iberoamérica.
- MURPHY, B. J. 1987. «Selecting out-of-control variables with  $T^2$  multivariate quality procedures». En: *The Statistician*, 36: 571-583.
- RUNGER, G. C.; ALT, F. B.; MONTGOMERY, D. C. 1996. «Contributors to a Multivariate SPC Chart Signal». En: *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 25: 2.203-2.213.
- SEPULVEDA, A.; NACHLAS, J. A. 1997. «A simulation approach to multivariate quality control». En: *Computers and Industrial Engineering*, 33: 113-116.
- SHEWHART, W. Y. 1931. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. New York: D. Van Nostrand Company Inc.
- TIMM, N. H. 1996. «Multivariate quality control using finite intersection tests». En: *Journal of Quality Technology*, 28: 233-243.
- TRACY, N.D.; YOUNG, J. C. MASON, R. L. 1992. «Multivariate Control Charts for individual Observations». En: *Journal of Quality Technology*, 24: 88-95.
- WASTERHUIS, J.A.; GURDEN, S. P.; SMILDE, A. K. 2000. «Generalized contribution plots in multivariate statistical process monitoring». En: *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 51: 95-114.
- WESTERN ELECTRIC. 1956. *Statistical Quality Control Handbook*. Indiana: Western Electric Corporation, Indianapolis.
- WOODALL, W. H.; NCUBE, M. N. 1985. «Multivariate CUSUM quality control Procedures». En: *Technometrics*, 27: 285-292.

### Anexo 1 Algoritmo de descomposición del estadístico $T^2$

<p>1) Calcular el estadístico individual <math>T_j^2</math> mediante la expresión <math>T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{s_j^2} \sim \left( \frac{m+1}{m} \right) F_{\alpha, 1, m-1}</math></p> <p>para todo componente del vector X, descartando las variables cuyas observaciones produzcan un valor significativo del estadístico <math>T_j^2</math>, debido a que estas observaciones están fuera de control individual y no es necesario determinar su relación con las otras variables observadas. Con las variables significantes descartadas se genera un conjunto de variables reducidas. Es necesario verificar si el subvector con las k variables restantes produce una señal. Si ninguna variable produce una señal, se ha localizado la fuente del problema.</p>
<p>2) (Opcional, pero de mucha utilidad para p muy grande). Examinar la estructura de correlación del conjunto reducido de variables. Descartar cualquier variable que tenga una correlación muy débil (menor que 0,3) con todas las otras variables. La contribución de una variable ubicada en esta categoría se mide por la componente <math>T_j^2</math> correspondiente.</p>
<p>3) Si el subvector de las k variables no descartadas todavía produce una señal, se calculan todos los términos <math>T_{ij}^2</math> de acuerdo con la ecuación <math>T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1})^2}{s_{j,1,2,\dots,j-1}^2}</math>. Hay que descartar del estudio todos los pares de variables <math>(x_i, x_j)</math> que tengan un <math>T_{ij}^2</math> significativo, pues ello indica que algo erróneo existe con las relaciones bivariantes; cuando esto ocurre, se reduce el conjunto de variables bajo consideración. Se examinan todas las variables descartadas debido a la señal producida. Se calcula el estadístico <math>T^2</math> para el subvector restante. Si no se presenta señal alguna, entonces se concluye que la fuente del problema se debe a las relaciones bivariantes y aquellas variables que fueron descartadas del control individual.</p>
<p>4) Si el subvector de las restantes variables todavía produce alguna señal, entonces es necesario calcular todos los términos <math>T_{ij,k}^2</math>. Descartar cualquier tripleta <math>(x_i, x_j, x_k)</math> de variables que muestren resultados significantes y verificar si el subvector restante produce alguna señal.</p>
<p>5) Este procedimiento continúa con los términos de orden superior hasta que no queden variables en el conjunto reducido.</p>

Fuente: Mason *et al.* (1995).

### Anexo 2 Cálculo de los límites de control para la Fase II

Límite de Control	Fórmula para el cálculo de los Límites de Control
LCS	$LCS = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{1-\frac{\alpha}{2}, p, m-p} = \frac{3(24+1)(24-1)}{24(24-3)} F_{1-\frac{0,05}{2}, 3, 21} = 13,07$
LCI	$LCI = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{\frac{\alpha}{2}, p, m-p} = \frac{3(24+1)(24-1)}{24(24-3)} F_{\frac{0,05}{2}, 3, 21} = 0,2418$

Fuente: elaboración propia.